

## Kiểm soát dao động của chất lỏng chuyển động theo phương nằm ngang bằng cách tạo quỹ đạo dựa trên tính phẳng

Cao Đức Thanh<sup>1</sup>, Nguyễn Việt Khánh<sup>2</sup>, Trần Thị Thanh Thảo<sup>3</sup>,  
Nguyễn Văn Minh<sup>2</sup>, Nguyễn Danh Huy<sup>2</sup>, Nguyễn Tùng Lâm<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Hàng hải Việt Nam, 484 Lạch Tray, Lê Chân, Hải Phòng, Việt Nam;

<sup>2</sup>Đại học Bách khoa Hà Nội, 1 Đại Cồ Việt, Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam;

<sup>3</sup>Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, Đại học Thái Nguyên, 666 đường 3/2, Thành phố Thái Nguyên, Thái Nguyên, Việt Nam.

\*Tác giả liên hệ: lam.nguyentung@hust.edu.vn

Nhận bài: 04/9/2024; Hoàn thiện: 12/11/2024; Chấp nhận đăng: 15/11/2024; Xuất bản: 06/12/2024.

DOI: <https://doi.org/10.54939/1859-1043.j.mst.FEE.2024.92-98>

### TÓM TẮT

*Dao động chất lỏng bên trong thùng chứa khi di chuyển là hiện tượng động học phức tạp có thể gây mất ổn định cho hệ thống chứa chất lỏng. Bài báo đề xuất phương pháp kiểm soát ổn định dao động cho bề mặt chất lỏng tại điểm đầu và điểm cuối hành trình, ứng dụng tính phẳng để thiết lập quỹ đạo chuyển động cho hệ đồng thời xây dựng bộ điều khiển bám tín hiệu đặt. Hiệu quả của phương pháp đề xuất được kiểm chứng thông qua các kết quả mô phỏng.*

**Từ khoá:** Sloshing; Flat output; Điều khiển chuyển động.

### 1. MỞ ĐẦU

Trong nhiều hệ thống kỹ thuật làm việc với đối tượng chất lỏng như chiết rót, vận chuyển, luyện kim,... hiện tượng dao động của chất lỏng bên trong các thùng chứa kết cấu không có vách ngăn khi di chuyển là một vấn đề đáng quan tâm. Sự dao động này không chỉ ảnh hưởng đến hiệu suất, tính ổn định, an toàn của hệ thống mà còn tiềm ẩn những nguy cơ gây hư hỏng thiết bị, sản phẩm. Một trong những thách thức lớn nhất là xây dựng một mô hình toán học mô tả chuyển động của chất lỏng một cách sát nhất với thực tế. Mô hình tương đương dạng vật nặng-lò xo-giảm chấn đã được đề xuất trong [1, 2] như một cách tiếp cận mới, giúp mô tả một cách thực tế hơn hành vi của chất lỏng so với các mô hình con lắc đơn. Mô hình vật nặng-lò xo-giảm chấn [3], được đề xuất trong [4] để ước tính chiều cao của bề mặt chất lỏng dao động. Điều này đã được kiểm chứng trong một vài ứng dụng chống rung chất lỏng ở nghiên cứu [5].

Mục đích của nghiên cứu là di chuyển thùng chứa chất lỏng dạng không có vách ngăn từ vị trí ban đầu đến vị trí đích mong muốn mà không làm cho chất lỏng dao động với biên độ lớn. Vì vậy, phải tạo ra một quỹ đạo chuyển động phù hợp đáp ứng điều kiện đặt ra. Một phương pháp được sử dụng phổ biến trong điều khiển chuyển động kết hợp giảm dao động là tạo dạng tín hiệu đầu vào (input shaping)[6]. Đây là phương pháp điều khiển chuyển động để giảm hoặc loại bỏ các rung động không mong muốn khi ta đã biết được tần số dao động riêng và hệ số tắt dần của hệ. Trong nghiên cứu [7] đã trình bày phương pháp tạo quỹ đạo tối ưu theo thời gian, tuy nhiên, việc giải bài toán tối ưu tham số là không hề dễ dàng. Cách tiếp cận mới sử dụng “tính phẳng” hay trong việc điều khiển chuyển động đang nổi lên mạnh mẽ trong những năm gần đây [8-10] do tính linh hoạt của nó trong việc thiết kế quỹ đạo. Bằng cách tận dụng đặc tính này, bài toán điều khiển có thể được chuyển thành bài toán quy hoạch và theo dõi quỹ đạo cho các đầu ra phẳng, đơn giản hóa việc thiết kế và thực hiện các chiến lược điều khiển [11]. Nghiên cứu [12] đã chỉ ra rằng vấn đề ngăn chặn sự dao động của chất lỏng có thể được xem như một bài toán thiết lập quỹ đạo hình học thích hợp dựa trên đầu ra phẳng. Ngoài ra, trong nghiên cứu này việc bám quỹ đạo sẽ được thực hiện bằng bộ điều khiển LQR (Linear-Quadratic Regulator), đây là một công cụ mạnh mẽ và linh hoạt để thiết kế các bộ điều khiển phản hồi tối ưu trong hệ thống tuyến tính [13]. Bài báo có cấu trúc như sau: Phần 2 trình bày các nội dung chính bao gồm: mô hình động học của chất lỏng,

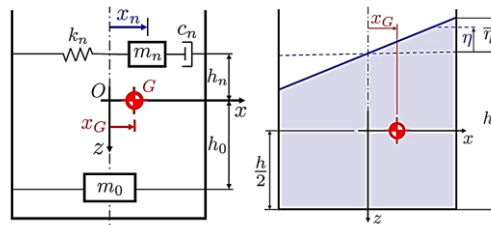
đặc tính đầu ra phẳng áp dụng để thiết lập quỹ đạo tối ưu, thiết kế bộ điều khiển. Hiệu quả của phương pháp đề xuất thông qua mô phỏng trong phần 3 và các kết luận được rút ra trong phần 4.

## 2. NỘI DUNG

### 2.1. Xây dựng mô hình động lực học chất lỏng

#### 2.1.1. Các giả thiết ban đầu

Mô hình cơ học tương đương tuyến tính dạng vật nặng - lò xo-giảm chấn được sử dụng để mô tả động học của chất lỏng (hình 1). Với giả thiết là bề mặt sóng sánh của chất lỏng khi chuyển động là phẳng, thùng chứa chất lỏng với kết cấu không có vách ngăn, loại hình trụ bán kính  $R$  chuyển động theo phương nằm ngang, chất lỏng có chiều cao  $h$  và khối lượng  $m_F$  bao gồm một vật nặng khối lượng cứng  $m_0$  chuyển động cùng với bình chứa và tập hợp các vật nặng chuyển động  $m_n$  đại diện cho các chế độ dao động. Mỗi vật nặng  $m_n$  được hạn chế bởi lò xo  $k_n$  và giảm chấn  $c_n$ , khoảng cách của nó từ trọng tâm  $G$  theo phương thẳng đứng kí hiệu là  $h_n$ . Mô hình chỉ nghiên cứu dao động chế độ (1,1) của chất lỏng và bỏ qua các dao động bậc cao phức tạp hơn.



**Hình 1.** Mô hình cơ học tương đương tuyến tính dạng vật nặng - lò xo - giảm chấn.

#### 2.1.2. Xây dựng phương trình

Khối lượng và tần số dao động riêng của vật nặng chuyển động thứ  $n$  được cung cấp từ [3]:

$$m_n = m_F \frac{2R}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)} \tanh\left(\xi_{1n} \frac{h}{R}\right) \quad (1)$$

$$\omega_n^2 = \frac{g \xi_{1n}}{R} \tanh\left(\xi_{1n} \frac{h}{R}\right) \quad (2)$$

Trong (1), (2),  $\xi_{1n}$  là một hằng số đặc trưng cho chế độ dao động được tra bảng trong [1],  $g$  là gia tốc trọng trường. Hệ số tắt dần được tính theo:

$$\zeta_n = \frac{2.89}{\pi} \sqrt{\frac{\nu}{R^{3/2} g^{1/2}}} \quad (3)$$

Theo [3], phương trình chuyển động của chất lỏng theo phương  $x$  có thể thu được bởi khai triển Lagrange, sau khi tuyến tính hóa ta thu được phương trình:

$$\ddot{x}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{x}_n + \omega_n^2 x_n = -\ddot{x}_0 \quad (4)$$

Trong đó:  $x_n$ ,  $\dot{x}_n$ ,  $\ddot{x}_n$  lần lượt là vị trí, vận tốc và gia tốc của vật nặng thứ  $n$ ;

$\ddot{x}_0$  là gia tốc tác động và bình chứa, đây cũng chính là tín hiệu điều khiển.

Chiều cao mực chất lỏng đo tại thành bình có thể xấp xỉ theo [3]:

$$\bar{\eta}_x \approx \frac{4hm_n}{m_F R} x_n \quad (5)$$

### 2.2. Tính phẳng của mô hình tuyến tính vật nặng - lò xo - giảm chấn

### 2.2.1. Cơ sở lý thuyết

Theo kết quả từ nghiên cứu [12]. Xét hệ thống điều khiển tuyến tính biểu diễn bởi ma trận đa thức sau:

$$A_s(s)x = B_s u \quad (6)$$

Với  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $u \in \mathbb{R}^m$ ;  $A_s(s)$  là ma trận  $n \times n$ ,  $B_s$  là ma trận  $n \times m$ . Trong ma trận đa thức, đầu ra phẳng của hệ thống tuyến tính có thể được xác định theo phương trình sau:

$$x = P_s y; u = Q_s y \quad (7)$$

Khi đó,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  được gọi là đầu ra phẳng tuyến tính của hệ thống thỏa mãn:

$$C_s^T A_s(s) P_s(s) = 0_{m \times m} \quad (8)$$

Bởi vì hệ thống (6) có thể điều khiển được nên đầu ra phẳng tuyến tính  $y$  luôn tồn tại, các ma trận  $P_s(s)$  và  $Q(s)$  cũng luôn xác định được.

### 2.2.2. Xác định đầu ra phẳng của hệ

Đặt  $u_x = \ddot{x}_o$  phương trình (4) có thể viết lại thành dưới dạng ma trận đa thức:

$$\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u_x \quad (9)$$

Chọn  $C_s^T = [1 \quad 1]$  là ma trận trực giao của  $B_s$ . Theo phương trình (8) ta có:

$$C_s^T A_s(s) P(s) = \begin{bmatrix} s^2 & s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

Từ đó, ta thu được:

$$P_1(s) = \frac{1}{\omega_n^2} (s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2); P_2(s) = -\frac{1}{\omega_n^2} s^2 \quad (11)$$

Theo (7) mối quan hệ giữa biến trạng thái và đầu ra phẳng như sau:

$$\begin{aligned} x_o &= \frac{1}{\omega_n^2} (s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2) y = \frac{1}{\omega_n^2} \ddot{y} + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \dot{y} + y \\ x_n &= -\frac{1}{\omega_n^2} (s^2) y = -\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{y}; u_x = M \left( \left( \frac{1}{\omega_n^2} \right) y^{(4)} + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} y^{(3)} + \ddot{y} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Cuối cùng bằng biến đổi toán học, từ (12) ta có thể tìm được đầu ra phẳng như sau:

$$y = x_o - \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \dot{x}_o + \left( 1 - \frac{4\zeta_n^2}{\omega_n} \right) x_n - \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \dot{x}_n \quad (13)$$

Do đó, hệ (4) là hệ có tính phẳng với  $y$  là đầu ra phẳng tuyến tính của hệ.

### 2.3. Thiết lập quỹ đạo chống rung dựa trên đầu ra phẳng

Trong phần này, nhóm tác giả sẽ trình bày phương pháp thiết lập quỹ đạo chống rung cho bình chứa chất lỏng theo phương ngang giữa 2 điểm gọi là quỹ đạo điểm điểm (rest-to-rest). Dao động của chất lỏng sẽ được kiểm soát tại điểm đầu hành trình và điểm cuối hành trình. Giả sử vị trí ban đầu của bình chứa ( $x_i$ ) là tại thời điểm  $t_i$ , tại điểm cuối hành trình là ( $x_f$ ) thời gian  $t_f$ , trong nghiên cứu chỉ xét đến chuyển động theo phương  $x$ , các điều kiện ban đầu và cuối như sau:

$$x_o(t_i) = x_i; \dot{x}_o(t_i) = 0; x_n(t_i) = 0; \dot{x}_n(t_i) = 0; u_x(t_i) = 0;$$

$$x_o(t_f) = x_f; \dot{x}_o(t_f) = 0; x_n(t_f) = 0; \dot{x}_n(t_f) = 0; u_x(t_f) = 0$$

theo (12), các điều kiện đầu và cuối có thể viết lại tựa đầu ra phẳng như sau:

$$y(t_0) = x_i, \quad \dot{y}(t_0) = 0, \ddot{y}(t_0) = 0, y^{(3)}(t_0) = 0, y^{(4)}(t_0) = 0,$$

$$y(t_f) = x_f, \dot{y}(t_f) = 0, \ddot{y}(t_f) = 0, y^{(3)}(t_f) = 0, y^{(4)}(t_f) = 0$$

Đa thức nội suy của quỹ đạo rest-to-rest có dạng như sau theo [15]:

$$y(t) = y(t_i) + \left( \frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^{r+2} \left( \sum_{k=0}^{r+1} a_k \left( \frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^k \right) \quad (14)$$

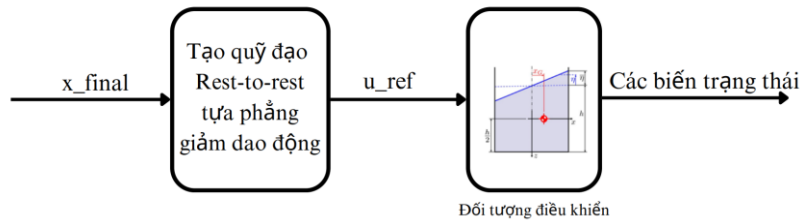
Các hệ số  $a$  được xác định bởi phương trình:

$$a = [a_0 \dots a_{r+1}]^T = A_r^{-1} B_r \quad (15)$$

Do có tổng cộng là 10 điều kiện đầu và cuối nên bậc của đa thức nội suy sẽ thấp nhất bằng 9. Ta tìm được đa thức nội suy:

$$y(t) = y_i + (y_f - y_i) \tau^5 \times (126 - 420\tau + 540\tau^2 - 315\tau^3 + 70\tau^4) \quad (16)$$

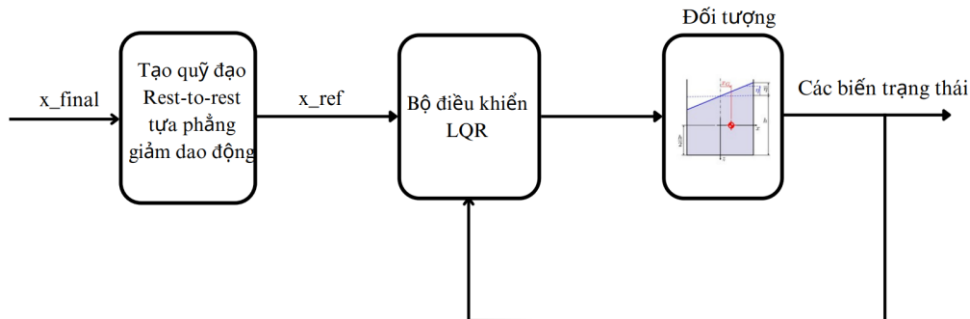
Trong đó,  $\tau = (t-t_i)/(t_f-t_i)$ . Sau đó, theo (12) có thể suy ngược các quỹ đạo đặt tương ứng của vị trí, vận tốc, gia tốc đảm bảo ổn định dao động chất lỏng ở điểm đầu và cuối hành trình. Cấu trúc điều khiển vòng hở, không hồi tiếp được thể hiện trên hình 2.



Hình 2. Cấu trúc điều khiển vòng hở (feedforward) ổn định dao động chất lỏng.

#### 2.4. Thiết kế bộ điều khiển bám quỹ đạo

Để bám được quỹ đạo tìm ra, nhóm tác giả sử dụng bộ điều khiển LQR theo cấu trúc điều khiển phản hồi vòng kín được thể hiện như hình 3.



Hình 3. Cấu trúc điều khiển vòng kín ổn định dao động chất lỏng.

Đặt các biến trạng thái là  $x = [x_n \quad x_0 \quad \dot{x}_n \quad \dot{x}_0]^T$ , có thể viết lại phương trình (4) dưới dạng:

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u; \text{ Trong đó, } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\omega_n \zeta_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Bộ điều khiển LQR được thiết kế tìm được hệ số tối ưu K để tối thiểu hóa hàm chi phí J:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q_1 x + R_1 u^2) dt \quad (18)$$

Trong đó,  $Q_1$  và  $R_1$  là các ma trận trọng số có thể chọn được. Có thể viết lại (18) thành:

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^{\infty} \left( x^T (A_1^T P + P A_1 + Q_1 - P B_1 R_1^{-1} B_1^T P) x + (u + R_1^{-1} B_1^T P x)^T R_1 (u + R_1^{-1} B_1^T P x) \right) dt \quad (19)$$

Với  $P$  là một ma trận đối xứng cần tìm và được xác định bởi phương trình Riccati:

$$A_1^T P + P A_1 + Q_1 - P B_1 R_1^{-1} B_1^T P = 0 \quad (20)$$

Khi đó, ma trận hệ số tối ưu  $K = R_1^{-1} B_1^T P$  và tín hiệu điều khiển được tính như sau:

$$u = -Kx \quad (21)$$

### 3. MÔ PHỎNG, TÍNH TOÁN, THẢO LUẬN

#### 3.1. Số liệu đầu vào, công cụ mô phỏng

**Bảng 1.** Tham số sử dụng cho mô phỏng.

Tham số	Giá trị	Đơn vị	Tham số	Giá trị	Đơn vị
$R$	50	mm	$\xi_{1n}$	1.841	–
$h$	70	mm	$\omega_n$	18.8968	rad/s
$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>	$(x_i; x_f)$	(0;6)	
$\rho$	997	kg/m <sup>3</sup>	$t_f$	5	s
$\nu$	0.001	Pa·s	$m_n$	0.1759	kg
$R_1$	0.01		$Q_1$	Diag{10, 15, 10, 5}	

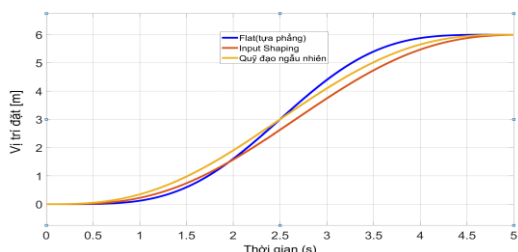
Nhóm tác giả thực hiện mô phỏng trên phần mềm Matlab/simulink. Tất cả các thông số được sử dụng trong bài báo được đưa ra trong bảng 1. Đồng thời kết quả mô phỏng cũng được so sánh một quỹ đạo ngẫu nhiên có dạng đường cong bậc 5 tạo bởi khối “Polynomial Trajectory” trên simulink. Quỹ đạo này được xử lý tiền định để loại bỏ các dao động dư và ổn định dao động bằng kỹ thuật định hình tín hiệu ngõ vào dạng ZVD (zero vibration derivative) được mô tả như sau:

$$\text{ZVD} = \begin{bmatrix} \frac{K}{(1+K)^2} & \frac{2K}{(1+K)^2} & \frac{K^2}{(1+K)^2} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega_d} & \frac{2\pi}{\omega_d} \end{bmatrix} \quad (22)$$

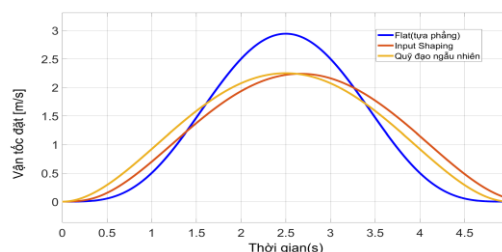
Trong đó,  $K = e^{-\frac{\zeta_n \pi}{\sqrt{1-\zeta_n^2}}}$ ;  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta_n^2}$ .  $\omega_n, \zeta_n$  lần lượt là tần số dao động riêng và hệ số tắt dần tính của hệ theo công thức (2) và (3). Các kết quả mô phỏng và so sánh khâu tạo quỹ đạo theo cấu trúc truyền thẳng (feedforward) được thể hiện ở hình 4-7. Với cấu trúc điều khiển vòng kín sử

dụng LQR ma trận hệ số tối ưu  $K = [-7.8403 \quad 0.4437 \quad -7.0787 \quad 1.0986]$ . Với kích bản này nhóm tác giả chọn thời gian di chuyển của bình chứa là 6 giây và vị trí điểm cuối là 3 m. Kết quả mô phỏng được thể hiện trên hình 8-9.

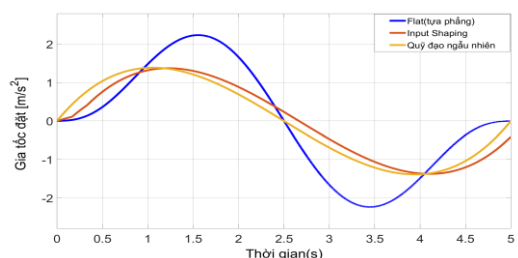
### 3.2. Kết quả mô phỏng và bình luận



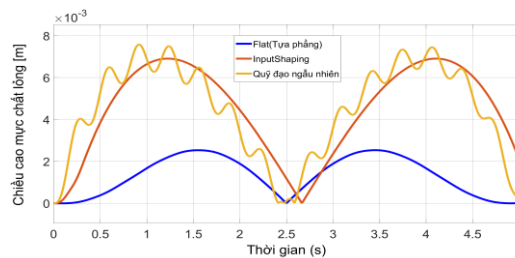
Hình 4. Vị trí của thùng chứa chất lỏng.



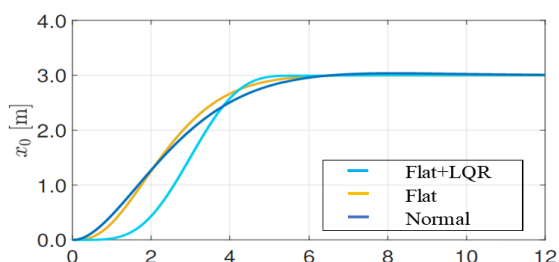
Hình 5. Vận tốc của thùng chứa chất lỏng.



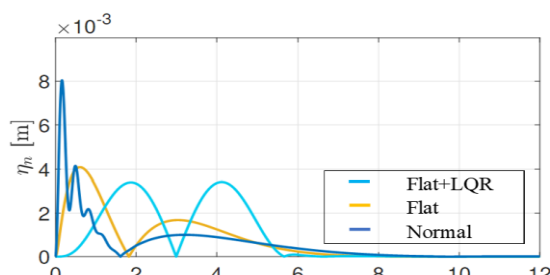
Hình 6. Gia tốc của thùng chứa chất lỏng.



Hình 7. Chiều cao mực chất lỏng.



Hình 8. Vị trí bình chứa khi có bộ điều khiển.



Hình 9. Chiều cao mực chất lỏng khi có bộ điều khiển LQR.

Hình 4 - hình 6 cho thấy, các tín hiệu đặt như vị trí, vận tốc, gia tốc cho thùng chứa chất lỏng được thiết lập theo đầu ra phẳng (flat) so sánh với phương pháp định hình đầu vào (input shaping). Mặc dù quỹ đạo tựa phẳng tạo ra vận tốc, gia tốc (hình 5,6) lớn hơn so với phương pháp input shaping nhưng chiều cao mực chất lỏng tối đa khoảng 2.5 mm (hình 7) thấp hơn rất nhiều so với phương pháp input shaping ( $\approx 8$  mm). Quỹ đạo tựa phẳng thiết kế dựa trên động học của hệ nên vẫn đảm bảo chất lỏng ổn định ở điểm đầu và điểm cuối hành trình trong khoảng thời gian 5 s trong khi đó phương pháp input shaping mất nhiều thời gian hơn, điều này chứng tỏ tính ưu việt của phương pháp đề xuất. Khi đưa thêm vào bộ điều khiển LQR (hình 8, 9) ta thấy thùng bám vị trí đặt và hiệu quả chống rung cho chất lỏng khi kết hợp tốt hơn khi so sánh với 2 trường hợp quỹ đạo còn lại với chiều cao mực chất lỏng tối đa là 3.3 mm, trong khi hai trường hợp còn lại là 8 mm và 4 mm.

## 4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu đã xác định đầu ra phẳng cho mô hình động học tuyến tính của chất lỏng. Đầu ra phẳng tìm ra được sử dụng để thiết lập quỹ đạo chống rung đảm bảo ổn định dao động cho bề mặt

chất lỏng ở điểm đầu và điểm cuối hành trình. Phương pháp tiếp cận này thể hiện chất lượng tốt hơn khi so sánh với phương pháp tạo dạng tín hiệu ngõ vào về hiệu quả chống rung. Cấu trúc khiển vòng kín sử dụng bộ LQR được xây dựng để bám tín hiệu đặt đồng thời đảm bảo tính ổn định cho hệ. Các kết quả mô phỏng không chỉ xác nhận tính hiệu quả của khâu tạo và bám tín hiệu đặt theo thời gian dựa trên tính phẳng mà còn cung cấp những kiến thức sâu sắc có giá trị về động lực học của hệ thống. Công việc trong tương lai của nhóm tác giả sẽ tập trung mở rộng điều khiển chống rung cho thùng chứa chất lỏng chuyển động theo hai chiều sử dụng mô hình phi tuyến, đồng thời kết hợp các bộ điều khiển hiện đại để nâng cao chất lượng điều khiển.

**Lời cảm ơn:** Nghiên cứu này được tài trợ bởi Đại học Bách khoa Hà Nội (HUST) trong đề tài mã số T2023-TĐ-002.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. BAUER, H.F, “*Nonlinear mechanical model for the description of propellant sloshing*”, AIAA Journal, 4(9), pp.1662–1668, (1966).
- [2]. Ibrahim, R.A., “*Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*”, Cambridge University Press, (2005).
- [3]. Guagliumi, L., Berti, A., Monti, E., Carricato, M., “*A simple model-based method for sloshing estimation in liquid transfer in automatic machines*”, IEEE Access 9, pp.129347–129357, (2021).
- [4]. Di Leva, R., Carricato, M., Gattringer, H., Müller, A., “*Sloshing dynamics estimation for liquid-filled containers under 2-dimensional excitation*”, In: Proceedings of the 10th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics, pp. 80–89, (2021).
- [5]. Guagliumi, L., Berti, A., Monti, E., Carricato, M., “*Antisloshing trajectories for high-acceleration motions in automatic machines*”, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, pp.144(7), (2022).
- [6]. M. Grundelius, “*Methods for Control of Liquid Slosh*”, Doctoral dissertation, Lund Institute of Technology, (2001).
- [7]. Leva, R.D., Carricato, M., Gattringer, H., Muller, A., “*Time-optimal trajectory planning for anti-sloshing 2-dimensional motions of an industrial robot*”, In: 2021 20th International Conference on Advanced Robotics (ICAR), IEEE, (2021).
- [8]. Fliess, M., Levine, J., Martin, P., Rouchon, P., “*Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples*”, International Journal of Control, 61(6), pp.1327–1361, (1995).
- [9]. Fliess, M., Levine, J., Martin, P., Rouchon, P., “*A lie-backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems*”, IEEE Transactions on Automatic Control, 44(5), pp.922–937, (1999).
- [10]. Levine, J., “*Analysis and Control of Nonlinear Systems*”, Springer, (2009).
- [11]. Fliess, M., Marquez, R., “*Continuous-time linear predictive control and flatness: A module-theoretic setting with examples*”, International Journal of Control, 73(7), pp.606–623, (2000).
- [12]. J. Levine and D. V. Nguyen, “*Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices*”, Systems and Control Letters, 48: pp.69–75, (2003).
- [13]. Q. Zang and J. Huang, “*Dynamics and control of three-dimensional slosh in a moving rectangular liquid container undergoing planar ex-citations*,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 62, no. 4, pp. 2309–2318, (2015).

### ABSTRACT

#### **Control of liquid sloshing container in horizontal motion by generating a trajectory based on the flatness theory**

*The oscillation of liquid inside a moving container is a complex nonlinear dynamic phenomenon that can induce instability in the fluid-containing system. This paper proposes a stabilization method for liquid surface oscillations at the initial and final points of the trajectory, utilizing flatness to establish the trajectory and constructing a tracking controller. The effectiveness of the proposed method is verified through simulation results.*

**Keywords:** Sloshing; Flat output; Motion control.