MÔ HÌNH CHÍNH XÁC HÓA TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT BIẾN DẠNG CỦA VỎ TRỤ MỎNG CÓ GÂN GIA CƯỜNG

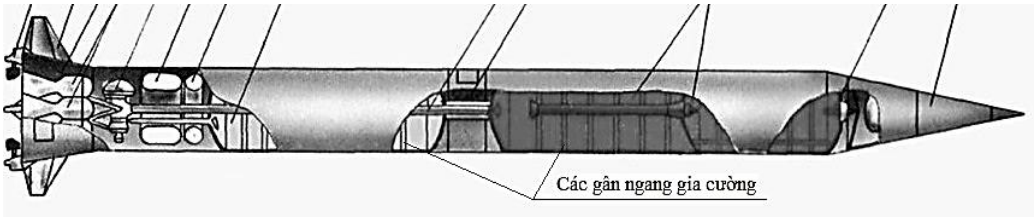
Võ Anh Hiếu*, Tăng Xuân Long, Trần Xuân Diệu

Tóm tắt: *Bài báo trình bày một phương án để nâng cao độ chính xác khi xác định trạng thái ứng suất biến dạng của vỏ mỏng có gân gia cường. Chuyển vị của vỏ được khai triển thành đa thức có bậc cao hơn so với lý thuyết cổ điển Kirchhoff-Love. Trên cơ sở các phương trình của lý thuyết đàn hồi và nguyên lý biến phân Lagrange đã xây dựng được mô hình toán học chính xác hơn cho vỏ có gân gia cường. Mô hình toán bao gồm các phương trình cân bằng theo trường chuyển vị và các điều kiện biên tương ứng. Từ đó khảo sát ảnh hưởng của các loại tải trọng, các tham số của gân lên trạng thái ứng suất của vỏ. Tiến hành so sánh trạng thái ứng suất của vỏ khi tính toán theo lý thuyết chính xác hóa và lý thuyết cổ điển. Kết quả tính toán cho thấy tại vùng liên kết, ứng suất pháp cắt có cùng bậc với các ứng suất chính.*

Từ khóa: Lý thuyết đàn hồi; Nguyên lý biến phân Lagrange; Vỏ có gân; Ứng suất pháp cắt.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Kết cấu vỏ trụ mỏng được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực tên lửa, máy bay. Trong các lĩnh vực này, do chiều dài của vỏ trụ thường lớn hơn nhiều so với đường kính nên người ta thường sử dụng kết cấu có gân gia cường để giảm ứng suất trong vỏ nhằm tăng độ cứng vững, độ ổn định cho thân vỏ tên lửa (ví dụ như trên hình 1).



Hình 1. *Kết cấu vỏ trụ mỏng có gân gia cường trong tên lửa đạn đạo P-12 (Liên Xô).*

Hiện nay, vỏ có gân được tính toán theo lý thuyết tấm vỏ cổ điển của Kirchhoff – Love [1] hoặc Reissner [2]. Các giả thuyết trong lý thuyết tấm vỏ cổ điển đã không tính toán hết tất cả các biến dạng cắt, do đó sẽ dẫn đến sai số khi xác định trạng thái ứng suất biến dạng tại các vùng liên kết, vùng nối hoặc nơi chịu tải trọng tập trung.

Một trong số các hướng nghiên cứu nhằm chính xác hóa lý thuyết tấm vỏ là việc khai triển các chuyển vị của vỏ thành đa thức bậc cao theo tọa độ cắt [3]. Dựa trên hướng tiếp cận này, trong các công trình [4] đã tiến hành tính toán trạng thái ứng suất của vỏ trụ trơn khi khai triển các chuyển vị của vỏ thành các đa thức theo tọa độ cắt cao hơn một bậc so với lý thuyết cổ điển của Kirchhoff – Love. Kết quả tính toán theo phương pháp này cho thấy tại các vùng trạng thái ứng suất thay đổi đột ngột có xuất hiện các ứng suất bổ sung tương đối lớn.

Trong bài báo này, dựa trên cách tiếp cận [3, 4] đã tiến hành xây dựng mô hình chính xác hóa trạng thái ứng suất biến dạng của vỏ trụ có gân ngang gia cường. Việc giải mô hình toán được thực hiện bằng phương pháp toán tử dựa trên phép biến đổi Laplace.

2. XÂY DỰNG MÔ HÌNH TOÁN

2.1. Xây dựng mô hình toán

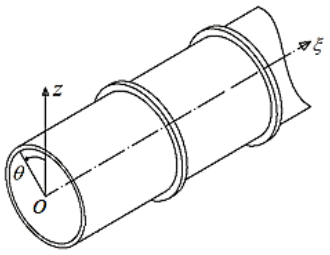
2.1.1. Mối quan hệ trường chuyển vị - biến dạng - ứng suất

Khi vỏ làm việc trong giới hạn đàn hồi thì mối liên hệ giữa biến dạng và ứng suất tuân theo định luật Hooke:

$$\sigma_1 = A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2 + A_{13}\varepsilon_3,\ \sigma_2 = A_{21}\varepsilon_1 + A_{22}\varepsilon_2 + A_{23}\varepsilon_3,$$
$$\tau_{12} = A_{44}\gamma_{12},\ \sigma_3 = A_{31}\varepsilon_1 + A_{32}\varepsilon_2 + A_{33}\varepsilon_3,\ \tau_{13} = A_{55}\gamma_{13},\ \tau_{23} = A_{66}\gamma_{23}. \quad (1)$$

trong đó các hệ số A_{ij} là các hằng số đàn hồi phụ thuộc vào tính chất vật liệu của vỏ.

Để tiện tính toán, chúng ta xét vỏ trụ trong hệ tọa độ trụ $O\xi\theta z$ như trên hình 2, trong đó ξ và θ là các tọa độ không đơn vị.



Hình 2. *Vỏ trụ có gân tròn gia cường.*

Để chính xác hóa trạng thái ứng suất biến dạng, chuyển vị của vỏ được khai triển thành đa thức bậc cao và có dạng [3]:

$$u(\xi,\theta,z) = \sum_{k=0}^{K} u_k(\xi,\theta)\frac{z^k}{k!},\ v(\xi,\theta,z) = \sum_{k=0}^{K} v_k(\xi,\theta)\frac{z^k}{k!},\ w(\xi,\theta,z) = \sum_{k=0}^{K-1} w_k(\xi,\theta)\frac{z^k}{k!}. \quad (2)$$

Trong khuôn khổ bài báo này chúng ta sẽ xét tới trường hợp đa thức khai triển của chuyển vị cao hơn một bậc so với lý thuyết cổ điển Kirchhoff – Love. Khi đó chuyển vị của vỏ được viết dưới dạng sau:

$$u(\xi,\theta,z) = u_0(\xi,\theta) + u_1(\xi,\theta)z + u_2(\xi,\theta)z^2/2,$$
$$v(\xi,\theta,z) = v_0(\xi,\theta) + v_1(\xi,\theta)z + v_2(\xi,\theta)z^2/2,\quad w(\xi,\theta,z) = w_0(\xi,\theta) + w_1(\xi,\theta)z. \quad (3)$$

Theo phương trình biến dạng – chuyển vị của lý thuyết đàn hồi, biến dạng của vỏ có dạng

$$\varepsilon_\xi = r\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + r\frac{\partial u_1}{\partial \xi}z + r\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\frac{z^2}{2},\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = w_1,$$
$$\varepsilon_\theta = r\left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0\right) + r\left(-r\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - rw_0 + w_1\right)z + r\left(2r^2\frac{\partial v_0}{\partial \theta} - 2r\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2r^2w_0 - 2rw_1\right)\frac{z^2}{2},$$
$$\gamma_{\xi\theta} = r\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi}\right) + r\left(-r\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi}\right)z + r\left(2r^2\frac{\partial u_0}{\partial \theta} - 2r\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi}\right)\frac{z^2}{2} \quad (4)$$
$$\gamma_{\xi z} = \left(u_1 + r\frac{\partial w_0}{\partial \xi}\right) + \left(u_2 + r\frac{\partial w_1}{\partial \xi}\right)z,$$
$$\gamma_{\theta z} = \left(-rv_0 + v_1 + r\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right) + \left(r^2v_0 - rv_1 + v_2 - r^2\frac{\partial w_0}{\partial \theta} + r\frac{\partial w_1}{\partial \theta}\right)z$$
$$+ r\left(-2r^2v_0 + 2rv_1 - v_2 + 2r^2\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - 2r\frac{\partial w_1}{\partial \theta}\right)\frac{z^2}{2}$$

Trong đó: $r = 1/R$; R – Bán kính mặt trung bình của vỏ.

Vỏ trụ có gân được xét như một cơ hệ bao gồm vỏ trụ trơn và các gân gia cường. Giả thiết rằng chiều dày gân gia cường rất bé so với chiều dài của vỏ, tác dụng giữa vỏ trụ và gân gia cường là theo đường, khi đó ảnh hưởng của gân lên vỏ sẽ bao gồm hai thành phần chính theo

hướng ngang và hướng pháp tuyến. Gân gia cường khi đó được mô hình hóa theo dạng thanh. Với dạng kết cấu này lý thuyết cổ điển đáp ứng đủ yêu cầu về độ chính xác, vì vậy, để đơn giản cho việc tính toán, chuyển vị các gân được khai triển theo đa thức bậc nhất:

$$v^j(\theta,z)=v_0^j(\theta)+v_1^j(\theta)\cdot z,\quad w^j(\theta)=w_0^j(\theta),\ j=1..N, \tag{5}$$

Trong đó, N là số lượng gân ngang.

Tại đường tiếp xúc của vỏ và gân, chuyển vị của chúng là như nhau, do vậy điều kiến tiếp xúc được viết dưới dạng:

$$v^j(\theta,h)=v(\xi_j,\theta,h),\ w^j(\theta,h)=w(\xi_j,\theta,h),\ j=1..N, \tag{6}$$

Trong đó: ξ_j – Tọa độ các đường tiếp xúc giữa gân và vỏ; h – Nửa chiều dày của vỏ.

Từ các biểu thức (3), (5), (6) ta thu được biểu thức biến dạng đối với gân

$$\varepsilon_\xi^j=0,\ \varepsilon_z^i=0,\ \gamma_{\xi z}^i=0,\ \gamma_{\xi\theta}^j=0,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\theta^j &= r_j\left[\frac{\partial}{\partial\theta}v_0(\xi_j,\theta)+h\frac{\partial}{\partial\theta}v_1(\xi_j,\theta)+\frac{h^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}v_2(\xi_j,\theta)-h\frac{dv_1^j}{d\theta}+hw_1(\xi_j,\theta)+w_0(\xi_j,\theta)\right]+\\
&+r_j\left[\frac{dv_1^j}{d\theta}-r_j\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_0(\xi_j,\theta)+h\frac{\partial}{\partial\theta}v_1(\xi_j,\theta)+\frac{h^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}v_2(\xi_j,\theta)-h\frac{dv_1^j}{d\theta}+hw_1(\xi_j,\theta)+w_0(\xi_j,\theta)\right)\right]z,\\
\gamma_{\theta z}^j &= r_j\left(h\frac{\partial}{\partial\theta}w_1(\xi_j,\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}w_0(\xi_j,\theta)\right)+\mathrm{v}_1^j-r_j\left(v_0(\xi_j,\theta)+h\frac{\partial}{\partial\theta}v_1(\xi_j,\theta)+\frac{h^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}v_2(\xi_j,\theta)-h\mathrm{v}_1^j\right)+\\
&+\left[-r_j^{\,2}\left(h\frac{\partial}{\partial\theta}w_1(\xi_j,\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}w_0(\xi_j,\theta)\right)-r_j\mathrm{v}_1^j+r_j^{\,2}\left(v_0(\xi_j,\theta)+h\frac{\partial}{\partial\theta}v_1(\xi_j,\theta)+\frac{h^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}v_2(\xi_j,\theta)-h\mathrm{v}_1^j\right)\right]z,
\end{aligned} \tag{7}$$

Trong đó: $r_j=1/R_j$; $R_j=R+h+h_j$; h_j – Nửa chiều cao của gân thứ j.

2.1.2. Các phương trình cân bằng và điều kiện biên

Các phương trình cân bằng và điều kiện biên đối với vỏ trụ có gân gia cường được xác định dựa trên nguyên lý biến phân Lagrange.

$$\delta E=\delta U+\delta\sum_{j=1}^{N}U^j-\delta A=0 \tag{8}$$

Trong đó: U, U^j, A tương ứng là thế năng biến dạng của vỏ, của gân và công của ngoại lực.

Xét vỏ trụ chịu tác dụng của tải trọng phân bố hướng tâm trên bề mặt bên trong $q_z(\xi,\theta)$. Biến phân thế năng biến dạng của vỏ, gân và biến phân của công ngoại lực được xác định theo công thức:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \iiint\left(\sigma_\xi\delta\varepsilon_\xi+\sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{\xi z}\delta\gamma_{\xi z}+\tau_{\theta z}\delta\gamma_{\theta z}+\tau_{\xi\theta}\delta\gamma_{\xi\theta}\right)(1+rz)R^2d\xi d\theta dz,\\
\delta U^j &= \iiint\left[\sigma_\xi^j\cdot\delta\varepsilon_\xi^j+\sigma_\theta^j\cdot\delta\varepsilon_\theta^j+\sigma_z^j\cdot\delta\varepsilon_z^j+\tau_{\xi\theta}^j\cdot\delta\gamma_{\xi\theta}^j+\tau_{\xi z}^j\cdot\delta\gamma_{\xi z}^j+\tau_{\theta z}^j\cdot\delta\gamma_{\theta z}^j\right](1+r_jz)R_jRd\xi d\theta dz,\\
\delta A &= \iint q_z(\delta w_0-h\delta w_1)\cdot(1-rh)R^2d\xi d\theta.
\end{aligned} \tag{9}$$

Thay các biểu thức (4), (7), (9) vào (8) và tích phân từng phần phương trình thu được, sau đó áp dụng tính chất ngẫu nhiên độc lập của các chuyển vị, ta xác lập được hệ phương trình cân bằng và điều kiện biên của vỏ trụ có gân.

Hệ phương trình cân bằng có dạng sau:

$$\frac{\partial N_\xi}{\partial \xi}+\frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \theta}=0,\quad r\frac{\partial M_{\xi 1}}{\partial \xi}+r\frac{\partial M_{\xi\theta 1}}{\partial \theta}-Q_{\xi z}=0,\quad r\frac{\partial M_{\xi 2}}{\partial \xi}+r\frac{\partial M_{\xi\theta 2}}{\partial \theta}-M_{\xi z}=0,$$

$$r\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}+r\frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi}+rQ_{\theta z}+\beta\sum_{j=1}^{N}k_j r_j\left(\frac{\partial N_\theta^j}{\partial \theta}+Q_{\theta z}^j\right)\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0,$$

$$r\frac{\partial M_{\theta 1}}{\partial \theta}+r\frac{\partial M_{\xi\theta 1}}{\partial \xi}+rM_{\theta z1}-Q_{\theta z}+\beta h\sum_{j=1}^{N}k_j r_j\left(\frac{\partial N_\theta^j}{\partial \theta}+Q_{\theta z}^j\right)\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0,$$

$$r\frac{\partial M_{\theta 2}}{\partial \theta}+r\frac{\partial M_{\xi\theta 2}}{\partial \xi}+rM_{\theta z2}-\widehat{M_{\theta z1}}+\frac{\beta h^2}{2}\sum_{j=1}^{N}k_j r_j\left(\frac{\partial N_\theta^j}{\partial \theta}+Q_{\theta z}^j\right)\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0, \tag{10}$$

$$r\frac{\partial Q_{\xi z}}{\partial \xi}+r\frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta}-rN_\theta+p_{z0}+\beta\sum_{j=1}^{N}k_j r_j\left(\frac{\partial Q_{\theta z}^j}{\partial \theta}-N_\theta^j\right)\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0,$$

$$r\frac{\partial M_{\xi z}}{\partial \xi}+r\frac{\partial M_{\theta z1}}{\partial \theta}-rM_{\theta 1}-Q_z+p_{z1}+\beta h\sum_{j=1}^{N}k_j r_j\left(\frac{\partial Q_{\theta z}^j}{\partial \theta}-N_\theta^j\right)\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0,$$

$$hr_j\frac{\partial N_\theta^j}{\partial \theta}-r_j\frac{\partial M_\theta^j}{\partial \theta}+\left(1+r_j h\right)Q_{\theta z}^j=0,\ j=1..N,$$

Trong đó: $\beta=b/R, b$ – Chiều dày của gân; $k_j=R_j/R$; $\delta\left(\xi-\xi_j\right)$– Hàm Delta Dirac, *N*, *M*, *Q*, *p* với các chỉ số là ký hiệu của các nội lực suy rộng.

Trong trường hợp tổng quát, điều kiện biên được viết dưới dạng sau:

Tại các biên cong theo tọa độ dài dọc trục $\xi=0$ и $\xi=\xi_0$:

$$u_0=\overline{u_0}\ \text{hoặc}\ N_\xi=0; u_1=\overline{u_1}\ \text{hoặc}\ M_{\xi 1}=0; u_2=\overline{u_2}\ \text{hoặc}\ M_{\xi 2}=0,$$
$$v_0=\overline{v_0}\ \text{hoặc}\ N_{\xi\theta}=0; v_1=\overline{v_1}\ \text{hoặc}\ M_{\xi\theta 1}=0; v_2=\overline{v_2}\ \text{hoặc}\ M_{\xi\theta 2}=0; \tag{11}$$
$$w_0=\overline{w_0}\ \text{hoặc}\ Q_{\xi z}=0; w_1=\overline{w_1}\ \text{hoặc}\ M_{\xi z}=0,$$

Tại các biên thẳng theo tọa độ góc $\theta=0$ и $\theta=\theta_0$:

$$u_0=\overline{u_0}\ \text{hoặc}\ N_{\xi\theta}=0; u_1=\overline{u_1}\ \text{hoặc}\ M_{\xi\theta 1}=0; u_2=\overline{u_2}\ \text{hoặc}\ M_{\xi\theta 2}=0,$$

$$v_0=\overline{v_0}\ \text{hoặc}\ rN_\theta+\sum_{j=1}^{N}\beta k_j r_j N_\theta^j\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0; v_1=\overline{v_1}\ \text{hoặc}\ rM_{\theta 1}+\sum_{j=1}^{N}\beta k_j r_j hN_\theta^j\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0,$$

$$v_2=\overline{v_2}\ \text{hoặc}\ rM_{\theta 2}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\beta k_j r_j h^2}{2}N_\theta^j\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0; w_0=\overline{w_0}\ \text{hoặc}\ rQ_{\theta z}+\sum_{j=1}^{N}\beta k_j r_j Q_{\theta z}^j\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0, \tag{12}$$

$$w_1=\overline{w_1}\ \text{hoặc}\ rM_{\theta z1}+\sum_{j=1}^{N}\beta k_j r_j hQ_{\theta z}^j\delta\left(\xi-\xi_j\right)=0; v_1^j=\overline{v_1^j}\ \text{hoặc}-hN_\theta^j+M_\theta^j=0,$$

Trong đó: $\overline{u_i}, \overline{v_i}, \overline{w_k}, i=0..2, k=0..1$ là các chuyển vị cho trước tại các biên.

Thay các biểu thức lực suy rộng vào hệ phương trình (10) ta thu được các phương trình cân bằng theo chuyển vị:

$$\sum_{n=0}^{2}\left(K^{k1n}+K_{11}^{k1n}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+K_{22}^{k1n}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)u_n+\sum_{n=0}^{2}K_{12}^{k2n}\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \theta}v_n+\sum_{m=0}^{1}K_1^{k3m}\frac{\partial}{\partial \xi}w_m=0, k=1,2,3,$$

$$\sum_{n=0}^{2} K_{12}^{l1n}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\theta}u_n+\sum_{n=0}^{2}\left(K^{l2n}+K_{11}^{l2n}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+K_{22}^{l2n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)v_n+\sum_{m=0}^{1}K_2^{l3m}\frac{\partial}{\partial\theta}w_m+\Bigg[\sum_{n=0}^{2}\Big(K^{luj2n}+$$

$$+K_{22}^{luj2n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big)v_n+\sum_{m=0}^{1}K_2^{luj3m}\frac{\partial}{\partial\theta}w_m+\left(K^{luj1}+K_{22}^{luj1}\frac{d^2}{d\theta^2}\right)v_1^j\Bigg]_{\xi=\xi_i}\sum_{j=1}^{N}\delta(\xi-\xi_j)=0,\quad l=4,5,6,$$

$$\sum_{n=0}^{2}K_1^{s1n}\frac{\partial}{\partial\xi}u_n+\sum_{n=0}^{2}K_2^{s2n}\frac{\partial}{\partial\theta}v_n+\sum_{m=0}^{1}\left(K^{s3m}+K_{11}^{s3m}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+K_{22}^{s3m}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)w_m+\Bigg[\sum_{n=0}^{2}K_2^{suj2n}\frac{\partial}{\partial\theta}v_n+$$

$$+\sum_{m=0}^{1}\left(K^{suj3m}+K_{22}^{suj3m}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)w_m+K_2^{suj1}\frac{dv_1^j}{d\theta}\Bigg]_{\xi=\xi_j}\sum_{j=1}^{N}\delta(\xi-\xi_j)=K^{s4}q_z,\quad s=7,8, \tag{13}$$

$$\Bigg[\sum_{n=0}^{2}\left(K^{9uj2n}+K_{22}^{9uj2n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)v_n+\sum_{m=0}^{1}K_2^{9uj3m}\frac{\partial}{\partial\theta}w_m\Bigg]_{\xi=\xi_j}+\left(K^{9uj1}+K_{22}^{9uj1}\frac{d^2}{d\theta^2}\right)v_1^j=0,\ \overline{j=1,N}.$$

Trong hệ phương trình (13) các hệ số K là các đại lượng không đổi, chúng phụ thuộc vào các tham số hình học và tính chất đàn hồi của vật liệu. Do các biểu thức của chúng phức tạp nên không trình bày trong khuôn khổ bài báo này.

2.2. Phương pháp giải

Để giải hệ phương trình (13) chúng ta biến đổi nó về hệ phương trình vi phân thường bằng cách khai triển các chuyển vị và tải trọng thành chuỗi lượng giác theo tọa độ θ. Sau đó thay các khai triển này vào (13) ta thu được các hệ phương trình vi phân thường đối với mỗi thành phần của chuỗi lượng giác.

Trong khuôn khổ bài báo này ta chỉ xét một trường hợp riêng khi vỏ trụ chịu tác dụng của tải trọng cục bộ $q_z=q_z(\xi,\theta)$ theo quy luật sau:

$$q_z=\begin{cases}0 & khi\ 0\le\xi<\xi_{01};\\ q(\xi)\cos m\theta & khi\ \xi_{01}\le\xi\le\xi_{02};\\ 0 & khi\ \xi_{02}\le\xi<\xi_0=L/R,\end{cases} \tag{14}$$

Với tải trọng dạng (14), chuyển vị của vỏ và gân có dạng:

$$u_k(\xi,\theta)=u_{km}(\xi)\cos m\theta,\quad v_k=v_{km}(\xi)\sin m\theta,\quad w_l(\xi,\theta)=w_{lm}(\xi)\cos m\theta,$$
$$v_1^j(\theta)=B_j\sin m\theta,\quad k=0..2,\ l=0..1, \tag{15}$$

Trong đó, B_j là hằng số chưa biết.

Xét vỏ trụ kín theo tọa độ góc. Khi đó, điều kiện biên (12) được thay thế bằng điều kiện tuần hoàn theo tọa độ góc θ. Với khai triển (14) và (15) điều kiện này được tự động thỏa mãn. Thay (14) và (15) vào (13), chúng ta thu được hệ phương trình vi phân thường.

$$\sum_{n=0}^{2}\left(K^{k1n}+K_{11}^{k1n}\frac{d^2}{d\xi^2}-m^2K_{22}^{k1n}\right)u_{nm}+\sum_{n=0}^{2}mK_{12}^{k2n}\frac{d}{d\xi}v_{nm}+\sum_{n=0}^{1}K_1^{k3n}\frac{d}{d\xi}w_{nm}=0,\quad k=1,2,3,$$

$$\sum_{n=0}^{2}-mK_{12}^{l1n}\frac{d}{d\xi}u_{nm}+\sum_{n=0}^{2}\left(K^{l2n}+K_{11}^{l2n}\frac{d^2}{d\xi^2}-m^2K_{22}^{l2n}\right)v_{nm}+\sum_{n=0}^{1}-mK_2^{l3n}w_{nm}+\Bigg[\sum_{n=0}^{2}\Big(K^{luj2n}-$$

$$-m^2K_{22}^{luj2n}\Big)v_{nmj}+\sum_{n=0}^{1}-mK_2^{luj3n}w_{nmj}+\left(K^{luj1}-m^2K_{22}^{luj1}\right)B_j\Bigg]\sum_{j=1}^{N}\delta(\xi-\xi_j)=0,\quad l=4,5,6,$$

$$\sum_{n=0}^{2} K_1^{s1n} \frac{d}{d\xi} u_{nm} + \sum_{n=0}^{2} mK_2^{s2n} v_{nm} + \sum_{n=0}^{1} \left(K^{s3n} + K_{11}^{s3n} \frac{d^2}{d\xi^2} - m^2 K_{22}^{s3n} \right) w_{nm} + \left[\sum_{n=0}^{2} mK_2^{suj2n} v_{nmj} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{1} \left(K^{suj3n} - m^2 K_{22}^{suj3n} \right) w_{nmj} + mK_2^{suj1} B_j \right] \sum_{j=1}^{N} \delta(\xi - \xi_j) = K^{s4} q\left[\eta\left(\xi - \xi_{01}\right) - \eta\left(\xi - \xi_{02}\right) \right], \quad s = 7, 8, \quad (16)$$

$$\sum_{n=0}^{2} \left(K^{9uj2n} - m^2 K_{22}^{9uj2n} \right) v_{nmj} + \sum_{n=0}^{1} -mK_2^{9uj3n} w_{nmj} + \left(K^{9uj1} - m^2 K_{22}^{9uj1} \right) B_j = 0, \; j = 1..N,$$

Trong đó: $v_{nmj} = v_{nm}\left(\xi_j\right); w_{tmj} = w_{tm}\left(\xi_j\right); n = 0..2; t = 0..1;$ $\eta(...)$ là hàm Heaviside.

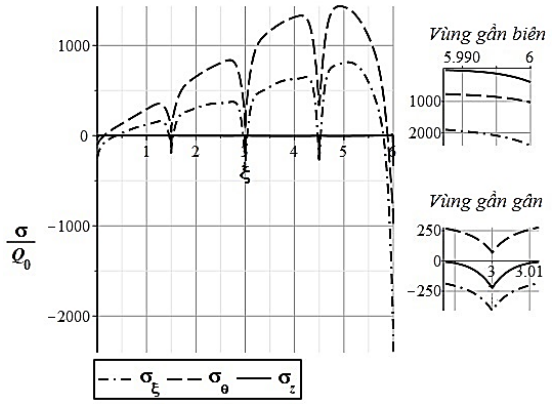
Thay biểu thức lực suy rộng và chuyển vị (15) vào các phương trình (11) ta thu được các điều kiện biên tương ứng với hệ phương trình (16) tại $\xi = 0$ и $\xi = \xi_0$.

Để giải hệ phương trình vi phân thường (16) chúng ta sử dụng phương pháp toán tử dựa trên phép biến đổi Laplace. Nhờ phép biến đổi Laplace, hệ phương trình (16) được biến đổi thành hệ phương trình đại số tuyến tính. Giải hệ phương trình này ta thu được các hàm ảnh của các chuyển vị. Sử dụng phép biến đổi Laplace ngược ta tìm được các chuyển vị u_{nm}, v_{nm}, w_{tm}, chúng còn chứa $\left(8 + 6N\right)$ hằng số chưa biết. Tám hằng số C_{ijk} được xác định từ điều kiện biên tại $\xi = \xi_0$, các hằng số v_{nmj}, w_{tmj}, B_j được xác định khi giải hệ phương trình $v_{nmj} = v_{nm}(\xi_j)$, $w_{tmj} = w_{tm}(\xi_j)$, $n = 0..2$, $t = 0..1$ và N phương trình cuối cùng trong hệ (16).

3. KHẢO SÁT PHÂN TÍCH KẾT QUẢ

Để làm ví dụ, ta xét vỏ trụ tròn có gân ngang gia cường được ngàm chặt hai đầu với các thông số: bán kính vỏ $R = 0{,}5\,(m)$; chiều dài vỏ $L = 6R = 3\,(m)$; chiều dày vỏ $2h = R/40 = 0{,}0125\ (m)$; hệ số Poisson $\mu = 0{,}3$; nửa chiều cao gân $h_j = 2h$, chiều rộng gân $b = h$.

Hình 3 trình bày kết quả tính toán dưới dạng đồ thị của các ứng suất pháp tuyến cực đại của vỏ chịu tác dụng của tải trọng (14) với $m = 5, \xi_{01} = 0, \xi_{02} = \xi_0, q\left(\xi\right) = Q_0\xi$; số lượng gân $N = 3$ (tọa độ các gân $\xi_1 = 1{,}5$; $\xi_2 = 3$; $\xi_3 = 4{,}5$), nửa chiều cao gân $h_j = 2h$.

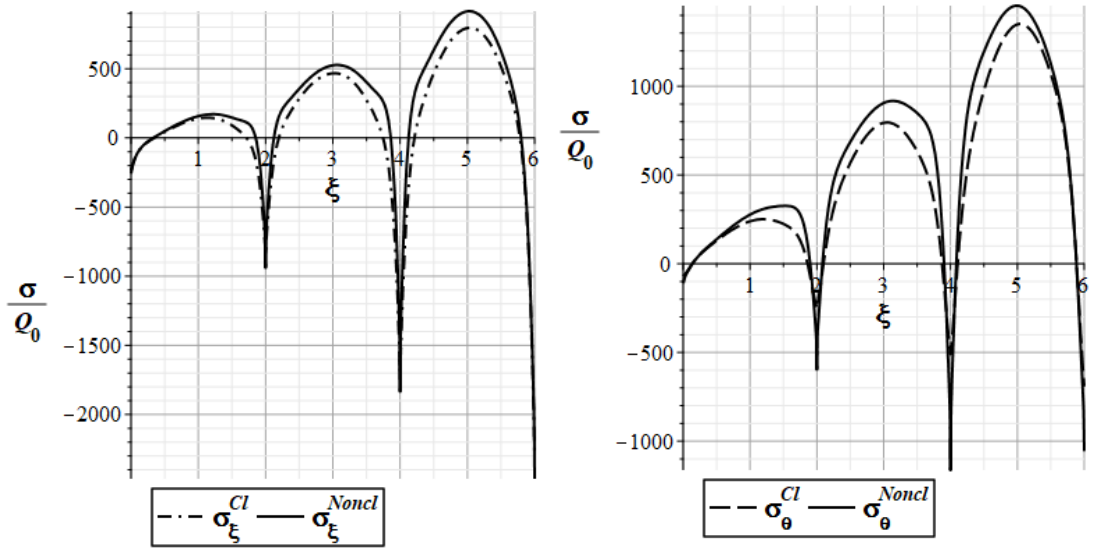


Hình 3. *Các ứng suất pháp tuyến cực đại theo chiều dài của vỏ.*

Đồ thị trên hình 3 chỉ ra rằng tại các vùng ngàm và gia cứng bởi gân, ứng suất pháp cắt σ_z có cùng bậc so với các ứng suất pháp tuyến theo phương dọc trục σ_ξ và phương ngang σ_θ.

Để so sánh kết quả thu được trong công trình này với lý thuyết cổ điển, trên hình 4 và bảng 1 trình bày độ sai lệch của ứng suất $\sigma_\xi, \sigma_\theta$ theo hai lý thuyết khác nhau, trong đó *"Cl"* là ký hiệu

của ứng suất theo lý thuyết cổ điển, *"Noncl"* – theo lý thuyết chính xác hóa. Việc tính toán được thực hiện với trường hợp số lượng gân $N = 2$, (tọa độ các gân $\xi_1 = 2;\ \xi_2 = 4;$), nửa chiều cao gân $h_j = 6h$.



Hình 4. *So sánh kết quả theo lý thuyết cổ điển và chính xác hóa.*

Bảng 1. *Độ lệch của ứng suất theo lý thuyết cổ điển và chính xác hóa.*

	$\xi = \xi_1$	$\xi = \xi_2$	$\xi = L/R$
$\left(\sigma_\xi^{Noncl} - \sigma_\xi^{Cl}\right)/\sigma_\xi^{Noncl}$	11%	11%	6,5%
$\left(\sigma_\theta^{Noncl} - \sigma_\theta^{Cl}\right)/\sigma_\theta^{Noncl}$	58%	58%	34%
$\sigma_z^{Noncl}/\sigma_\xi^{Noncl}$	28%	28%	16%

Việc so sánh cho thấy tính toán theo lý thuyết vỏ bậc cao cho phép chính xác hóa trạng thái ứng suất biến dạng của vỏ tại những vùng lân cận biên và lân cận gân, so với tính toán theo lý thuyết cổ điển. Còn tại những vùng xa biên, tính toán theo lý thuyết cổ điển và các lý thuyết phi cổ điển không cho sai lệch nhiều.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này dựa trên các phương trình của lý thuyết đàn hồi ba chiều và khai triển chuyển vị của vỏ thành đa thức bậc cao đã thu được các kết quả sau:

1. Đã xây dựng được mô hình chính xác hóa trạng thái ứng suất biến dạng của vỏ trụ có gân ngang gia cường có tính tới ảnh hưởng của ứng suất, biến dạng pháp ngang (bị bỏ qua trong lý thuyết cổ điển).
2. Kết quả tính toán cho thấy ở những vùng lân cận gân gia cường và vùng vỏ bị ngàm chặt, ứng suất pháp cắt là đáng kể so với các ứng suất chính. Điều này có ý nghĩa quan trọng trong đánh giá độ bền của vỏ có gân gia cường.

Trên thực tế việc xuất hiện các vùng ứng suất tập trung của vỏ tại các vị trí có gân và vị trí vỏ bị ngàm chặt hoặc chịu tác dụng của tải trọng tập trung còn phụ thuộc vào độ dày hay mỏng của vỏ. Vì vậy, trong các công trình tiếp theo tác giả sẽ khảo sát sự ảnh hưởng độ dày vỏ đến sự sai khác về ứng suất giữa lý thuyết cổ tấm vỏ cổ điển và lý thuyết chính xác hóa để đưa ra các khuyến cáo về các trường hợp nên sử dụng mô hình chính xác hóa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Dudchenko A.A., Sergeev V.N, "*The nonlinear equations of equilibrium of the conical shell, supported by a discrete set of frames*", PNRPU Mechanics Bulletin (2017), no. 2, pp. 78-98.

[2]. Karpov V.V., "*Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts*", International Journal of Solids and Structures (2018), Vol. 146, pp. 117-135.

[3]. Васильев В.В., Лурье С.А., "*К проблеме уточнения теории пологих оболочек*", Изв. АН. МТТ (1990), № 6. С. 139-146.

[4]. Firsanov V.V., Doan T.N.*, "Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory",* Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal (2015), Vol. 6. Issue 2. Pp. 135-166.

ABSTRACT

REFINED MODEL OF STRESS-STRAIN STATE OF THE REINFORCED SHELL

The article presents an option to improve accuracy in determining the stress-strain state of ribbed thin shells. The displacements of the shell are decomposed into higher order polynomials than the classical Kirchhoff – Love theory. Based on the relations of the theory of elasticity and the Lagrange variational principle, a refined mathematical model of reinforced shells is constructed. The mathematical model includes the equations of equilibrium in displacements and the corresponding boundary conditions. The influence of the types of load, parameters of the ribs on the stress state of the shell have been investigated. A comparison between the results of the calculation of the stress state of the shell according to the classical and refined theories is given. The calculation results show that in the region of the joint, the transverse normal stresses are in the same order as the main stresses.

Keywords: Theory of elasticity; Lagrange variational principle; Reinforced shell; Transverse normal stresses.

Nhận bài ngày 14 tháng 9 năm 2021
Hoàn thiện ngày 20 tháng 10 năm 2021
Chấp nhận đăng ngày 28 tháng 10 năm 2021

Địa chỉ: Viện Tên lửa, Viện Khoa học và Công nghệ quân sự.
*Email: anhhieu1512@gmail.com.