

## So sánh, đánh giá một số thuật toán giảm bậc cho hệ thống điện bậc cao

Nguyễn Thanh Tùng<sup>1\*</sup>, Đào Huy Du<sup>2</sup>, Vũ Ngọc Kiên<sup>2</sup><sup>1</sup>Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Đại học Thái Nguyên;<sup>2</sup>Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, Đại học Thái Nguyên.

\*Email: nttung@ictu.edu.vn

Nhận bài: 30/8/2022; Hoàn thiện: 16/11/2022; Chấp nhận đăng: 28/11/2022; Xuất bản: 23/12/2022.

DOI: <https://doi.org/10.54939/1859-1043.j.mst.FEE.2022.104-111>

## TÓM TẮT

Bài báo giới thiệu, so sánh và đánh giá 4 thuật toán giảm bậc mô hình đó là Cắt ngắn cân bằng (BT), Cắt ngắn cân bằng H-infinity (HINFBT), Xấp xỉ chuẩn Hankel (HNA) và lặp Krylov hữu tỉ (IRKA) cho mô hình hệ thống điện bậc cao không ổn định. Nhóm tác giả áp dụng các thuật toán này để giảm hệ có bậc 66 xuống hệ bậc 10 và bậc 25. Từ kết quả mô phỏng và sai lệch giữa hệ giảm bậc với hệ gốc có thể thấy thuật toán BT cho đáp ứng trong miền thời gian, miền tần số bám sát hệ gốc nhất với sai số nhỏ nhất trong khi IRKA sai khác nhiều nhất trong 4 thuật toán. Thuật toán HINFBT có thể giảm bậc trực tiếp cho đối tượng không ổn định mà không cần phân rã hệ, và phương pháp HNA giữ lại các giá trị suy biến Hankel mang năng lượng lớn của hệ ban đầu nên bảo toàn được tính ổn định của hệ gốc.

**Từ khóa:** Giảm bậc mô hình; Hệ thống điện bậc cao; Chặt cân bằng; Cắt ngắn cân bằng H-infinity; Krylov hữu tỉ; Xấp xỉ chuẩn Hankel.

## 1. MỞ ĐẦU

Xét một hệ động lực học  $G(s)$  bất biến theo thời gian tuyến tính LTI (Linear Time-Invariant) bậc nhất được mô tả bởi các phương trình tương đương gồm: Hệ phương trình vi phân, Ma trận không gian trạng thái và Hàm truyền:

$$G(s): \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \Leftrightarrow G(s) := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Leftrightarrow G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1)$$

Trong đó:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Trong nhiều trường hợp, như mô phỏng mạch điện, mô hình hoá đối tượng, nhận dạng hệ thống hoặc các bài toán điều khiển phụ thuộc thời gian, số chiều bậc của hệ lớn. Khi cài đặt, hệ thống bậc cao có thể khiến cho việc tính toán không khả thi do giới hạn về phần cứng, bộ nhớ, thời gian, độ tin cậy,... Một phương pháp khắc phục điều này là giảm bậc mô hình MOR (Model Order Reduction). Mục tiêu của MOR là tạo ra một hệ có chiều không gian thấp mang các đặc tính đáp ứng tương tự như hệ gốc nhưng các yêu cầu lưu trữ, thời gian đánh giá, khả năng tính toán, chi phí triển khai, v.v đơn giản hơn. Mô hình giảm bậc có thể được sử dụng để thay thế hệ bậc cao đáp ứng các ứng dụng thời gian thực.

Hệ giảm bậc  $G_r(s)$  của  $G(s)$  được xác định là:

$$G_r(s): \begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) + D_r u(t) \end{cases} \Leftrightarrow G_r(s) := \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \Leftrightarrow G_r(s) := C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r \quad (2)$$

Trong đó:  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ ,  $D_r \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $r < n$  và thoả mãn các yêu cầu cơ bản:

- Sai số xấp xỉ  $\|y - y_r\|$  là nhỏ và tồn tại một sai số toàn cục.
- Một số thuộc tính của hệ thống, như tính ổn định, tính thụ động, v.v được bảo toàn.
- Mang lại hiệu quả về mặt tính toán.

Một trong nhiều phương pháp MOR đó cắt ngắn (chặt) cân bằng BT (Balanced truncation)

được đề xuất bởi Moore [1]. Phương pháp này thực hiện bằng cách áp dụng điều kiện tương đương lên quá trình đường chéo hóa đồng thời hai ma trận Gramian điều khiển và Gramian quan sát động học của hệ. Hai ma trận này được xác định bằng cách giải 2 phương trình Lyapunov. Việc tương đương hóa hai ma trận đường chéo như thế cho phép chuyển mô hình gốc biểu diễn trong hệ cơ sở bất kỳ thành hệ tương đương trong không gian cân bằng nội. Từ đây, mô hình bậc thấp xác định bằng cách loại bỏ các giá trị riêng, các trạng thái mang năng lượng nhỏ. Thuật toán BT chỉ áp dụng cho hệ ổn định do đó với hệ không ổn định cần phân tách thành 2 phân hệ: 1 phân hệ chứa các điểm cực có phần thực dương và 1 phân hệ gồm các điểm cực có phần thực âm, sau đó mới tiến hành giảm bậc cho phần ổn định. Hai thuật toán liên quan chặt chẽ khác đến BT là Cắt ngắn cân bằng H-infinity HINFBT (H-Infinity Balanced Truncation) và Xấp xỉ chuẩn Hankel HNA (Hankel-Norm Approximation). HINFBT [2] có thể giảm bậc trực tiếp cho hệ không ổn định, phương pháp thực hiện tương tự như BT nhưng Gramian điều khiển và Gramian quan sát được xác định từ hai phương trình Riccati. HNA biến đổi hai ma trận Gramian điều khiển và Gramian quan sát của hệ về dạng đường chéo, có các phần tử là các giá trị suy biến Hankel được sắp xếp nhỏ dần từ trên xuống dưới, mô hình giảm bậc thu được bằng cách loại bỏ các giá trị mang ít năng lượng (cắt bỏ các giá trị suy biến Hankel nhỏ) [3].

Một phương pháp tiếp cận giảm bậc mô hình khác là Thuật toán lặp Krylov hữu tỉ IRKA (Iterative Rational Krylov Algorithm) được giới thiệu bởi Gugercin, Antoulas và Beattie [4]. Dữ liệu nội suy ban đầu hoặc được chọn ngẫu nhiên hoặc bởi một mô hình giảm bậc có thể tính toán đơn giản. IRKA không đảm bảo tính ổn định của các mô hình giảm bậc trung gian, kể cả bậc mà hệ cần giảm đến, điều này xảy ra khi dữ liệu nội suy ban đầu khác xa với dữ liệu tối ưu.

Trong những công trình gần đây, các phương pháp giảm bậc BT, HINFBT, HNA và IRKA vẫn được tiếp tục phát triển và nghiên cứu. Có thể thấy trong một số tài liệu như: Công trình [5] thiết kế bộ điều khiển đa biến mạnh mẽ sử dụng khung H-infinity Loop cho bộ chuyển đổi DC-DC tích hợp bậc 4 TIFOI (Two-Input Fourth-Order Integrated), giúp củng cố các đặc tính của hệ thống chuyển đổi bằng cách cắt ngắn cân bằng H-infinity, đảm bảo phân chia tải và điều chỉnh bus điện áp của bộ TIFOI. Bài báo [6] đề xuất áp dụng HNA để tối ưu hệ thống mô tả thời gian liên tục, và [7] áp dụng HNA để giảm bậc cho đối tượng không ổn định bậc cao. Nhóm tác giả trong [8] sử dụng phần mở rộng của định lý Adamyan-Arov-Kerim để phát triển một thuật toán thiết kế các bộ lọc số tối ưu trong tính toán HNA để giảm bậc bộ lọc tham chiếu. Tài liệu [9] đề xuất cắt ngắn cân bằng hỗn hợp  $H_2/H_\infty$  cho hệ tuyến tính thời gian rời rạc, trong đó, phương trình Lyapunov và Riccati có cùng ma trận đường chéo xác định dương, từ đây có thể cắt ngắn cân bằng, tạo ra mô hình giảm bậc có giới hạn về sai số. [10] đưa ra kỹ thuật hạ bậc mô hình dựa trên BT kết hợp với mạng neural. Bài báo [11] đề xuất áp dụng BT để giảm kích thước mạch tích hợp, bảo toàn tính ổn định và thụ động. [12] thực hiện giảm tần số giới hạn mạch RLCK thông qua BT cho hệ vi phân bậc hai, có thể được kết hợp với các bộ giải Lyapunov bậc thấp hiệu quả, dẫn đến bậc mô hình nhỏ, đảm bảo độ chính xác tốt hơn so với BT thường. Kỹ thuật giảm bậc mô hình cân bằng được áp dụng cho biến tần hoà lưới trong Microgrid được trình bày trong [13]. Bài báo [14] đề xuất một chiến lược mới để điều chỉnh tần số lưới điện tối ưu trong hệ thống điện được kết nối với nhau gồm điện xoay chiều và điện gió ngoài khơi. Bộ điều khiển được phát triển để phối hợp hoạt động của máy phát điện đồng bộ và bộ chuyển đổi, đảm bảo công suất tối ưu của lưới điện xoay chiều và giảm thiểu độ lệch tần số. Sau đó, bộ điều khiển được hạ bậc xuống sử dụng BT để loại bỏ các biến trạng thái khó quan sát và khó kiểm soát trong khi vẫn bảo toàn các đặc tính phản hồi ưu thế của chúng. [15] đề xuất một khuôn khổ nâng cao cho IRKA, để giảm chi phí tính toán trong khi vẫn đảm bảo tính tối ưu khi hội tụ. Bài báo [16] đưa ra phương pháp tiếp cận IRKA mới dựa trên heuristic được phát triển để giảm bậc mô hình đa đầu vào đa đầu ra (MIMO) trong hệ thống điện. Công trình [17] tiến hành giảm bậc mô hình cho hệ thống lưới điện MIMO, áp dụng trên hai mô hình điện gió quy mô lớn, giúp duy trì độ chính xác cao đồng thời hỗ trợ lập kế hoạch vận hành hệ thống điện được hiệu quả. Tài liệu [18] đưa ra phương

pháp giúp tăng tốc nghịch đảo dữ liệu điện từ nguồn điều khiển trên miền tần số bằng thuật toán không gian con Rational Krylov. Kết quả cho thấy, thuật toán hiệu quả về mặt tính toán, giúp đẩy nhanh tốc độ xử lý.

Như vậy, các hướng về MOR sử dụng BT, HINFBT, HNA và IRKA được các nhà nghiên cứu rất quan tâm, các công trình mới tập trung vào cải tiến, hiệu chỉnh các thuật toán hoặc ứng dụng trực tiếp các phương pháp cho từng bài toán, đối tượng, hệ thống cần giảm bậc cụ thể.

Nhằm kiểm chứng và đánh giá các phương pháp BT, HINFBT, HNA và IRKA, nhóm tác giả áp dụng chúng vào hệ thống điện không ổn định trong [19] có bậc 66, để giảm thiểu xuống bậc 10 và bậc 25. Tiến hành mô phỏng các đáp ứng trong miền thời gian, miền tần số và tính toán sai lệch giữa hệ gốc bậc với hệ giảm bậc, để đưa ra các nhận xét về khả năng giảm bậc của các thuật toán.

Bài báo có bố cục như sau: Mục 1 là lời dẫn mở đầu, từng bước triển khai các thuật toán BT, HINFBT, HNA và IRKA được trình bày ở Mục 2, 3, 4 và 5. Kết quả mô phỏng các đáp ứng và tính toán sai số tuyệt đối giữa hệ gốc với các hệ giảm bậc sử dụng các thuật toán này, sau đó đưa ra nhận xét, đánh giá được đưa ra trong Mục 6. Cuối cùng mục 7 là Kết luận về bài báo.

## 2. THUẬT TOÁN CẮT NGẮN (CHẶT) CÂN BẰNG

Thuật toán Cắt ngắn (chặt) cân bằng BT (Balanced truncation) [1] được mô tả như sau:

**Đầu vào:** Hệ ổn định tiệm cận và tối thiểu  $(A, B, C, D)$  có bậc  $n$  được mô tả như (1):

- Bước 1: Giải hai phương trình Lyapunov (3), (4) để xác định Gramian điều khiển (tiếp cận)  $P$  và Gramian quan sát  $Q$ : ( $P > 0$ ;  $Q > 0$ ).

$$AP + PA^T = -BB^T \quad (3)$$

$$A^T Q + QA = -C^T C \quad (4)$$

- Bước 2: Phân tích Cholesky cho  $P$  và  $Q$  thành:

$$P = RR^T \quad (5)$$

$$Q = LL^T \quad (6)$$

- Bước 3: Phân tích giá trị suy biến SVD:

$$L^T R = U \Sigma V^T \quad (7)$$

- Bước 4: Tính ma trận chuyển đổi:

$$T := RV \Sigma^{-\frac{1}{2}}; T^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T L^T \quad (8)$$

- Bước 5: Chuyển đổi cân bằng:

$$\left[ T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D \right] = \left[ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 \quad C_2], D \right] \quad (9)$$

- Bước 6: Tính bậc  $r$  cần giảm ( $r < n$ )

**Đầu ra:** Hệ giảm bậc ổn định tiệm cận  $(A_r, B_r, C_r, D_r) = (A_{11}, B_1, C_1, D)$

## 3. THUẬT TOÁN CẮT NGẮN CÂN BẰNG H-INFINITY

Thuật toán Cắt cân bằng H-infinity HINFBT (H-Infinity Balanced Truncation) [2] được trình bày như sau:

**Đầu vào:** Hệ tối thiểu  $(A, B, C, D)$  có bậc  $n$  được mô tả như (1):

- Bước 1: Giải hai phương trình Riccati để xác định Gramian điều khiển (tiếp cận)  $P$  và Gramian quan sát  $Q$ : ( $P > 0$ ;  $Q > 0$ ).

$$AP + PA^T + BB^T = (1 - \gamma^{-2})(PC^T + BD^T)(I + DD^T)^{-1}(PC^T + BD^T)^T \quad (10)$$

$$A^T Q + Q A + C^T C = (1 - \gamma^{-2})(B^T Q + D^T C)^T (I + D^T D)^{-1} (B^T Q + D^T C) \quad (11)$$

Trong đó,  $\gamma$  là: Chi phí tối ưu được tính toán trong quá trình xây dựng bộ điều khiển H-Infinity ( $0 < \gamma \leq 1$ ).

- Bước 2 ÷ Bước 6: Tương tự như Thuật toán Cắt ngắn cân bằng.

**Đầu ra:** Hệ giảm bậc ổn định tiệm cận  $(A_r, B_r, C_r, D_r) = (A_{11}, B_1, C_1, D)$

#### 4. THUẬT TOÁN XẤP XỈ CHUẨN HANKEL

Thuật toán Xấp xỉ chuẩn Hankel HNA (Hankel-Norm Approximation) [3] được triển khai theo trình tự sau:

**Đầu vào:** Hệ ổn định tiệm cận và tối thiểu  $(A, B, C, D)$  có bậc  $n$  được mô tả như (1):

- Bước 1: Giải hai phương trình Lyapunov để xác định Gramian điều khiển (tiếp cận)  $P$  và Gramian quan sát  $Q$ : ( $P > 0$ ;  $Q > 0$ ).

$$AP + PA^T = -BB^T \quad (12)$$

$$A^T Q + QA = -C^T C \quad (13)$$

- Bước 2: Lựa chọn bậc  $r$  cần giảm.

- Bước 3: Biến đổi Gramian điều khiển (tiếp cận)  $P$  và Gramian quan sát  $Q$  về dạng

$P = Q = \begin{bmatrix} \Sigma & \\ & \sigma_{r+1} I \end{bmatrix}$ . Trong đó,  $\sigma_{r+1}$  là giá trị suy biến Hankel và mọi phần tử đường chéo của  $\Sigma$  đều lớn hơn  $\sigma_{r+1}$ .

- Bước 4: Phân vùng  $(A, B, C, D)$  về dạng:

$$[A, B, C, D] = \left[ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 \quad C_2], D \right] \quad (14)$$

- Bước 5: Tính toán ma trận trực giao  $U$  và ma trận  $F$  sao cho:

$$U := -(C_2^T)^{-1} B_2 \quad (15)$$

$$F := \Sigma^2 - \sigma_{r+1}^2 I$$

- Bước 6: Tính toán các ma trận

$$A_r = F^{-1} (\sigma_{r+1}^2 A_{11}^T + \Sigma A_{11} \Sigma - \sigma_{r+1} C_1^T U B_1^T) \quad (16)$$

$$B_r = F^{-1} (\Sigma B_1 + \sigma_{r+1} C_1^T U) \quad (17)$$

$$C_r = C_1 \Sigma - \sigma_{r+1} U B_1^T \quad (18)$$

$$D_r = D + \sigma_{r+1} U \quad (19)$$

- Bước 6: Tính bậc  $r$  cần giảm ( $r < n$ )

**Đầu ra:** Hệ giảm bậc ổn định tiệm cận  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$

#### 5. THUẬT TOÁN LẬP KRYLOV HỮU TỈ

Thuật toán lập Krylov hữu tỉ IRKA (Iterative Rational Krylov Algorithm) [4] mô tả như sau:

**Đầu vào:** Hệ ổn định tiệm cận và tối thiểu  $(A, B, C, D)$  có bậc  $n$  được mô tả như (1), trong đó, điều kiện để hệ này có thể hội tụ sau khi nội suy  $A = A^T$ ;  $B = C^T$ .

- Bước 1: Khởi tạo dữ liệu nội suy ban đầu:  $\mu_i (i = 1, \dots, r)$ .

Lặp lại 2 Bước sau cho đến khi hội tụ, tức là khi các giá trị riêng (các cực) của hệ ở bước nội suy sau xấp xỉ bằng các giá trị riêng của hệ ở bước nội suy trước (không thay đổi nữa). Mỗi lần lặp, IRKA thực hiện phép nội suy Hermite hàm truyền hệ gốc. IRKA lấy xấp xỉ lặp lại các điểm nội suy tối ưu (chính là các giá trị riêng hay các cực của hệ giảm bậc trung gian). Nó bắt đầu với  $r$  các điểm nội suy tùy ý, sau đó, tại mỗi lần lặp nó áp đặt điều kiện tối ưu cần thiết theo chuẩn  $H_2$ :

- Bước 2: Xây dựng  $[\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}] := [W^T A V, W^T B, C V, D]$  với  $W, V \in \mathbb{C}^{n \times r}$ ;  $W^H V = I_r$  và tính:

$$\text{Im}V = \text{Im} \begin{bmatrix} (-\mu_1 I_n - A)^{-1} B & \dots & (-\mu_r I_n - A)^{-1} B \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\text{Im}W = \text{Im} \begin{bmatrix} (-\mu_1 I_n - A)^{-T} C & \dots & (-\mu_r I_n - A)^{-T} C \end{bmatrix} \quad (21)$$

- Bước 3: Tính toán dữ liệu nội suy mới:  $\mu_i (i=1, \dots, r)$ . Tính toán một ma trận khả nghịch  $X \in \mathbb{C}^{r \times r}$  sao cho  $X^{-1} \tilde{A} X = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$  và đặt:  $B := X^{-1} \tilde{B}$ ,  $C := \tilde{C} X$ ,  $\tilde{D} := D$

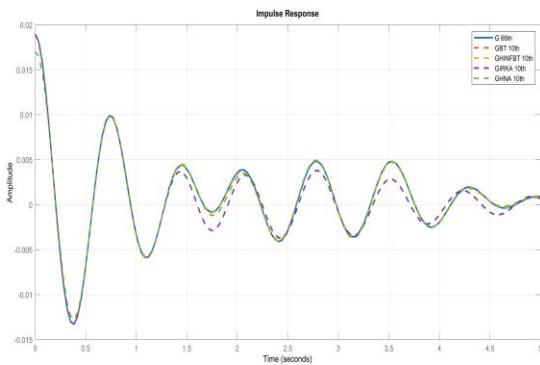
**Đầu ra:** Hệ giảm bậc ổn định tiệm cận  $(A_r, B_r, C_r, D_r) = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ .

## 6. GIẢM BẬC CHO HỆ THỐNG ĐIỆN BẬC CAO

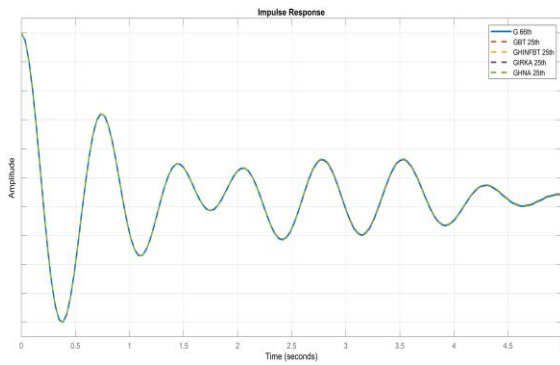
Xét một hệ thống điện bậc cao được mô tả trong tài liệu [19]. Đây là một mô hình của Hệ thống điện thực tế New England (CEPEL, Brazil). Điểm chuẩn này được mô tả bởi tệp dữ liệu *ww\_36\_pmec\_36.mat*, là một hệ SISO có bậc 66, gồm 4 ma trận  $A^{66 \times 66}$ ,  $B^{66 \times 1}$ ,  $C^{1 \times 66}$ ,  $D^{1 \times 1}$ . Hệ thống này không ổn định vì có một điểm cực có phần thực dương.

**Nhận xét 1:** Xuất phát từ hai ràng buộc: sai lệch giữa hệ gốc với hệ giảm bậc nhỏ cùng với mong muốn bậc được giảm càng thấp càng tốt, nhận thấy giá trị Hankel mang năng lượng tương ứng với các bậc 10 và 25 là tối ưu cho hệ. Từ đây, nhóm tác giả sẽ áp dụng phương pháp chặt cân bằng BT để giảm độ phức tạp của hệ thống điện bậc 66 này về bậc 10 và 25.

Áp dụng 4 phương pháp BT, HINFBT, HNA và IRKA để giảm độ phức tạp của hệ thống điện bậc 66 này bằng các hệ thống tương đương bậc thấp hơn. Các bậc giảm xuống là bậc 10 và 25. Tiến hành cài đặt các thuật toán, mô phỏng thu được đáp ứng xung và đồ thị bode như kết quả ở hình 1, hình 2, hình 3 và hình 4.



**Hình 1.** Đáp ứng xung của hệ gốc (bậc 66) và của hệ giảm bậc (bậc 10) sử dụng các thuật toán BT, HINFBT, IRKA và HNA.



**Hình 2.** Đáp ứng xung của hệ gốc (bậc 66) và của hệ giảm bậc (bậc 25) sử dụng các thuật toán BT, HINFBT, IRKA và HNA.

**Nhận xét 2:** Từ đáp ứng xung của hệ gốc (bậc 66) và của hệ giảm về bậc 10 sử dụng các thuật toán BT, HINFBT, IRKA và HNA như hình 1, trong khoảng thời gian mô phỏng trên, ta có:

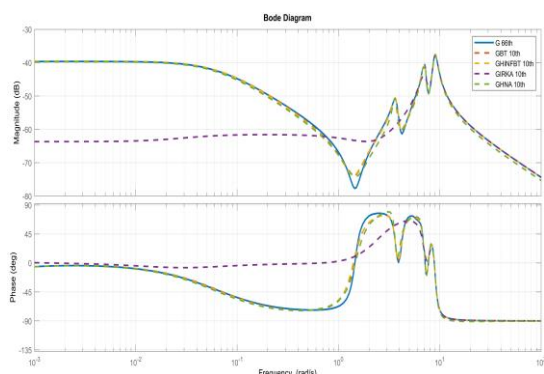
- Đáp ứng của hệ giảm bậc sử dụng phương pháp IRKA có sai lệch lớn nhất, nó chỉ khá trùng khớp với hệ gốc trong khoảng thời gian từ  $0 \div 1,25$  (s) và đáp ứng xung của hệ bậc 10 bám sát hệ gốc nhất với thuật toán BT.

- Các đáp ứng xung của hệ giảm bậc khi sử dụng phương pháp BT, HINFBT, HNA gần trùng khớp với hệ gốc nên có thể sử dụng 1 trong 3 phương pháp này để thay thế hệ gốc khi cần làm việc với đáp ứng trong miền thời gian.

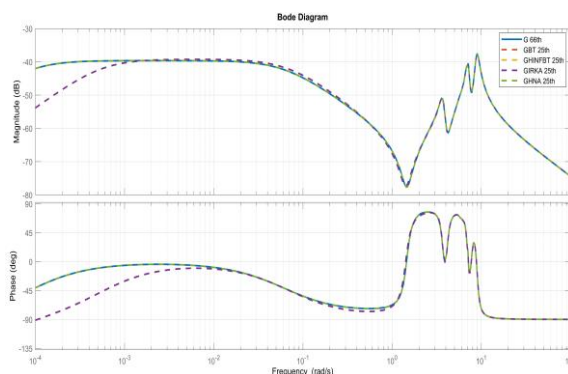
**Nhận xét 3:** Từ đáp ứng xung của hệ gốc (bậc 66) và của hệ giảm bậc về bậc 25 dùng các thuật toán BT, HINFBT, IRKA và HNA như hình 2, trong khoảng thời gian mô phỏng, ta có:

- Tất cả các hệ giảm về bậc 25 khi sử dụng các phương pháp BT, HINFBT, IRKA và HNA đều bám sát hệ gốc bậc 66.

- Có thể sử dụng 1 trong 4 phương pháp này nhằm hạ bậc hệ gốc về bậc 25 để thay thế hệ bậc 66 khi cần làm việc với đáp ứng trong miền thời gian.



**Hình 3.** Biểu đồ Bode của hệ gốc (bậc 66) và của hệ giảm bậc (bậc 10) sử dụng các thuật toán BT, HINFBT, IRKA và HNA.



**Hình 4.** Biểu đồ Bode của hệ gốc (bậc 66) và của hệ giảm bậc (bậc 25) sử dụng các thuật toán BT, HINFBT, IRKA và HNA.

**Nhận xét 4:** Từ đồ thị Bode của hệ gốc (bậc 66) và của hệ giảm về bậc 10 sử dụng các thuật toán BT, HINFBT, IRKA và HNA như hình 3, trong khoảng tần số mô phỏng trên, thấy được:

- Đáp ứng của hệ giảm bậc sử dụng phương pháp IRKA có sai lệch lớn nhất, và đáp ứng của hệ bậc 10 bám sát hệ gốc nhất với thuật toán BT.

- Các đáp ứng của hệ giảm bậc khi sử dụng BT, HINFBT, HNA khá sát với hệ gốc, sai lệch nhiều trong khoảng tần số  $1 \div 8,5$  (rad/s) nên có thể sử dụng 1 trong 3 phương pháp này để thay thế hệ gốc khi cần làm việc với đáp ứng trong miền tần số khác khoảng sai lệch này.

**Nhận xét 5:** Từ đồ thị Bode của hệ gốc (bậc 66) và của hệ giảm về bậc 25 sử dụng các thuật toán BT, HINFBT, IRKA và HNA, như hình 4, trong khoảng tần số mô phỏng trên, thấy được:

- Đáp ứng của hệ giảm bậc sử dụng phương pháp IRKA khá sát với đáp ứng của hệ gốc.

- Các đáp ứng của hệ giảm bậc khi sử dụng phương pháp BT, HINFBT, HNA trùng khớp với hệ gốc nên có thể sử dụng 1 trong 3 phương pháp này để thay thế hệ gốc khi cần làm việc với đáp ứng trong miền tần số.

**Bảng 1.** Sai số tuyệt đối theo chuẩn  $H_\infty$  của hệ bậc 10 so với hệ gốc bậc 66.

THUẬT TOÁN	$\ G - G_r\ _{H_\infty}$
BT	0.0020361
HINFBT	0.0053253
IRKA	0.0097525
HNA	0.0029075

**Bảng 2.** Sai số tuyệt đối theo chuẩn  $H_\infty$  của hệ bậc 25 so với hệ gốc bậc 66.

THUẬT TOÁN	$\ G - G_r\ _{H_\infty}$
BT	$4,9759160 \cdot 10^{-8}$
HINFBT	$511,1156320 \cdot 10^{-8}$
IRKA	$86759,3199160 \cdot 10^{-8}$
HNA	$5,9808529 \cdot 10^{-8}$

Sai số tuyệt đối của hệ giảm bậc theo chuẩn  $H_\infty$  của hệ thống bậc giảm (bậc 10 và bậc 25) so với hệ gốc (bậc 66) khi sử dụng 4 phương pháp: BT, HINFBT, IRKA, HNA tương ứng được thể

hiện trong bảng 1 và bảng 2.

#### Nhận xét 6:

- Sai số của hệ giảm bậc (cả hệ giảm về bậc 10 và bậc 25) nhỏ nhất khi sử dụng phương pháp BT, tiếp theo là HNA và lớn nhất với IRKA.

- Nếu chỉ quan tâm đến sai số tuyệt đối nhỏ trong 4 phương pháp này khi giảm bậc hệ gốc về hệ bậc 10 và bậc 25 thì có thể sử dụng 2 thuật toán BT và HNA.

### 7. KẾT LUẬN

Bài báo giới thiệu 4 thuật toán giảm bậc mô hình đó là Cắt ngắn cân bằng (BT), Cắt ngắn cân bằng H-infinity (HINFBT), lặp Krylov hữu tỉ (IRKA) và Xấp xỉ chuẩn Hankel (HNA). Mỗi thuật toán có những đặc điểm riêng và để kiểm chứng khả năng giảm bậc của các phương pháp, nhóm tác giả áp dụng từng thuật toán này vào mô hình đối tượng là hệ thống điện không ổn định có bậc 66, để giảm thiểu xuống bậc 10 và bậc 25. Từ kết quả mô phỏng và sai lệch giữa hệ gốc bậc và hệ giảm bậc có thể thấy thuật toán BT cho đáp ứng trong miền thời gian, miền tần số bám sát hệ gốc nhất với sai số nhỏ nhất trong khi IRKA sai khác với hệ gốc lớn nhất trong 4 thuật toán. Thuật toán HNA loại đi các giá trị suy biến Hankel mang ít năng lượng của hệ gốc nên bảo toàn được tính ổn định của hệ còn phương pháp HINFBT có thể giảm bậc trực tiếp cho đối tượng không ổn định mà không cần phân rã hệ như BT và HNA. Hướng nghiên cứu tiếp theo của nhóm tác giả là đánh giá, so sánh các thuật toán giảm bậc khác với các thuật toán đã trình bày hoặc cải tiến, phát triển các phương pháp mới đáp ứng tốt các tiêu chí cho bài toán giảm bậc mô hình đối tượng bậc cao.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. B. Moore, "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26, no. 1, pp. 17-32, (1981).
- [2]. Mustafa, D. and Keith Glover. "Controller reduction by Hinf-balanced truncation", IEEE Transactions on Automatic Control 36: 668-682, (1991).
- [3]. Safonov, M.G., R.Y. Chiang, and D.J.N. Limebeer, "Optimal Hankel Model Reduction for Nonminimal Systems," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. 35, no. 4, pp. 496-502, (1990).
- [4]. Gugercin, S.; Antoulas, A.C.; Beattie, C., "H<sub>2</sub> Model Reduction for Large-Scale Linear Dynamical Systems", Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 30, SIAM, pp. 609–638, (2008).
- [5]. B. A. Reddy and M. Veerachary, "Robust multivariable controller design using H-infinity Loop shaping for TIFOI DC-DC converter," 2016 IEEE Uttar Pradesh Section International Conference on Electrical, Computer and Electronics Engineering (UPCON), pp. 372-377, (2016).
- [6]. X. Cao, M. B. Saltik and S. Weiland, "Optimal Hankel Norm Approximation for Continuous-Time Descriptor Systems," 2018 Annual American Control Conference (ACC), pp. 6409-6414, (2018).
- [7]. S. Pandey, R. S. Yadav, S. K. Chaudhary, K. G. Upadhyay and S. P. Singh, "Hankel norm approximation of a highly unstable system," 2018 5th IEEE Uttar Pradesh Section International Conference on Electrical, Electronics and Computer Engineering (UPCON), pp. 1-5, (2018).
- [8]. M. Kagalenko, "Multicomponent Optimal in the Hankel Norm Order Reduction for Design of the Digital Filter Banks," 2019 8th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), pp. 1-5, (2019).
- [9]. Y. Sakai, T. Wada and Y. Fujisaki, "Mixed H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> Balanced Truncations for Discrete Time Linear Systems," 2019 12th Asian Control Conference (ASCC), pp. 301-306, (2019).
- [10]. M. Baziyad, A. Jarndal and M. Bettayeb, "A Model Order Reduction Technique Based on Balanced Truncation Method and Artificial Neural Networks," 2019 8th International Conference on Modeling Simulation and Applied Optimization (ICMSAO), pp. 1-5, (2019).
- [11]. D. Yang, "A Model Reduction Order Selection Way about Truncation Balanced Reduction Algorithm," 2020 7th International Conference on Information Science and Control Engineering (ICISCE), pp. 52-54, (2020).
- [12]. O. Axelou, D. Garyfallou and G. Floros, "Frequency-Limited Reduction of RLCK Circuits via

- Second-Order Balanced Truncation*," SMACD / PRIME 2021; International Conference on SMACD and 16th Conference on PRIME, pp. 1-4, (2021).
- [13]. M. Rasheduzzaman, P. Fajri and B. Falahati, "*Balanced Model Order Reduction Techniques Applied to Grid-tied Inverters In a Microgrid*," 2022 IEEE Conference on Technologies for Sustainability (SusTech), pp. 195-202, (2022).
- [14]. J. -S. Kim, J. -Y. Park, Y. -J. Kim and O. Gomis-Bellmunt, "*Decentralized Robust Frequency Regulation of Multi-terminal HVDC-linked Grids*," in IEEE Transactions on Power Systems, (2022).
- [15]. A. Castagnotto, H. K. F. Panzer and B. Lohmann, "*Fast H2-optimal model order reduction exploiting the local nature of Krylov-subspace methods*," 2016 European Control Conference (ECC), pp. 1958-1969, (2016).
- [16]. A. Yogarathinam, J. Kaur and N. R. Chaudhuri, "*A New H-IRKA Approach for Model Reduction with Explicit Modal Preservation: Application on Grids with Renewable Penetration*," in IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 27, no. 2, pp. 880-888, (2019).
- [17]. H. R. Ali and B. C. Pal, "*Model Order Reduction of Multi-Terminal Direct-Current Grid Systems*," in IEEE Transactions on Power Systems, vol. 36, no. 1, pp. 699-711, (2021).
- [18]. J. Liu, Z. Ren, X. Xiao, J. Tang and P. Lin, "*Accelerating the Frequency Domain Controlled-Source Electromagnetic Data Inversion Using Rational Krylov Subspace Algorithm*," in IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 60, pp. 1-12, Art no. 4510412, (2022).
- [19]. ROMMES, J., MARTINS, N., "*Efficient computation of transfer function dominant poles using subspace acceleration*". IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 21, Issue 3, pp. 1218-1226, (2006).

#### ABSTRACT

#### Compare and evaluate some order reduction algorithms for high-order power systems

*This paper introduces, compares and evaluates 4 model order reduction algorithms which are Balanced truncation (BT), H-infinity Balanced truncation (HINFBT), Hankel-Norm Approximation (HNA) and Iterative Rational Krylov (IRKA) for high-order power system models without stability. The authors apply these algorithms to reduce a system of order 66<sup>th</sup> to a system of order 10<sup>th</sup> and 25<sup>th</sup>. From the simulation results and the difference between the order reduction system and the original system, it can be seen that the BT algorithm gives the response in the time domain, the frequency domain closely follows the original system with the smallest error while IRKA differs the most among the 4 algorithms. The HINFBT algorithm can directly reduce the order of unstable objects without system decay, and the HNA method retains the high energy Hankel degeneracy values of the original system, thus preserving the stability of the original system.*

**Keywords:** Model order reduction; Higher order power system; Balanced truncation; H-infinity balanced truncation; Iterative Rational Krylov; Hankel normal approximation.